

莫比乌斯带与超材料对称性： 理论和应用

Möbius Strips and Metamaterial Symmetry: Theory and Applications

作者：Ulrich L. Rohde 德国科特布斯布兰登堡科技大学
Ajay K. Poddar Synergy Microwave 公司

科学家和哲学家的固有天性就是想象、探索并推测广阔宇宙中的新鲜事物。宇宙的广阔让人们相信我们生活在一个高维，或者说成莫比乌斯带状的宇宙空间中。在这个空间中，我们可以在不跨越任何边界或边缘的情况下遍历整个路径，并永远没有终结。

对于科学家们来说，莫比乌斯表面是一个违反Huckel规则¹，有着极其特殊机械特性、声学特性以及电学特性的拓扑结构。图1给出了典型的莫比乌斯结构，并定义了这种形状的空间关系，它可以在度量性质几乎不变的情况下跨越维度（也就是说，当拉伸或者扭曲一个目标的时候，其性质保持不变）。某些纳米结构就有着相同的弹性性质。

构造莫比乌斯表面的充要条件是它的高斯曲率在任何地方都为0。一个曲率非零的曲面上，存在一个独特的平面（可伸长曲面），其中曲面为测地线（如图1），Starostin和Heijden将之描述为²：

$$\vec{x}(s,t) = \vec{r}(s) + t[\vec{b}(s) + \eta(s)\vec{\tau}(s)] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \eta(s)k(s), \\ s &= [0, L], t = [-w, w] \end{aligned} \quad (2)$$

其中， \vec{r} 表征了一条中心线为r，长度为L，宽度为2w的线， $\vec{\tau}$ 是单位切向量， \vec{b} 是单位次法线，k为曲率， τ 表征了中心线的扭曲程度。参数化的等值线s能产生一个角度为 $\beta = \arctan(1/\eta)$ 的正值切线方向。

如图1a所示，我们可以沿莫比乌斯带的长度方向移动并遍历整个路径然后回到起点，而且在这个过程中不用穿越任何边界。在图1b中，可以找到一条路径，

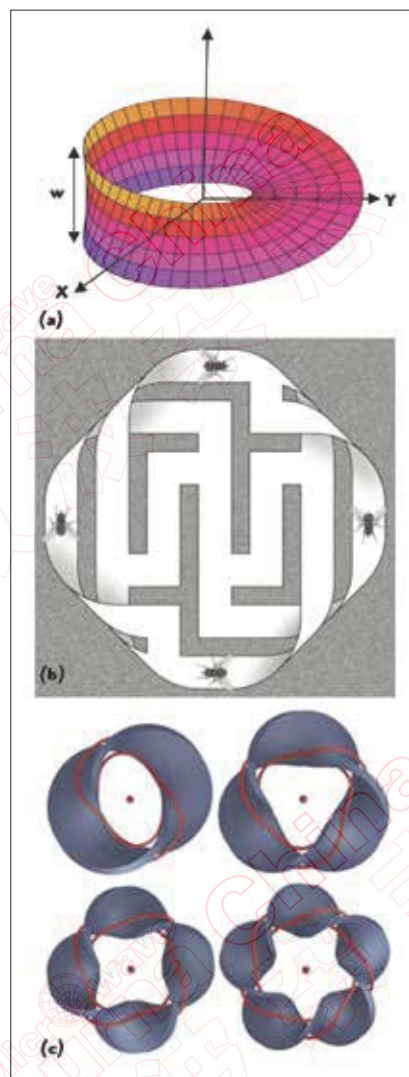


图1. (a) 莫比乌斯带，(b) 莫比乌斯苍蝇迷宫（由David Phillips提供）³，(c) 由硅制作的莫比乌斯带⁴。

使四个苍蝇沿相同路径，在不相遇且不走重复路的情况下回到最初的位置。记录下你在路径的哪一边³。用硅做成的小型莫比乌斯带结点被用在下一代液晶上（如图 1c 所示，应用于电脑、电视和手机的平板显示的液晶都利用了它自身的光可调特性）⁴。

莫比乌斯带的独特性质是因为它的形状可以减小变形能，而变形能的减小则完全是由于弯曲造成的，可以由如下公式表征：

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^L \int_{-w}^w k_I^2(s, t) dt ds \quad (3)$$

其中， $D = 2h^3 E / [3(1-\nu^2)]$ ， $2h$ 是莫比乌斯带的厚度， E 和 ν 分别是材料的杨氏模量和泊松比。

莫比乌斯变换 $f(z)$ 是一个复数的分式线性变换方程：

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d};$$

$$(a, b, c, d, \in \mathbb{C} \text{ and } ad - bc \neq 0) \quad (4)$$

其中， $z \in \mathbb{C} \rightarrow z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ 。

从等式 4 可以看到，莫比乌斯变换 $f(z)$ 的基本性质

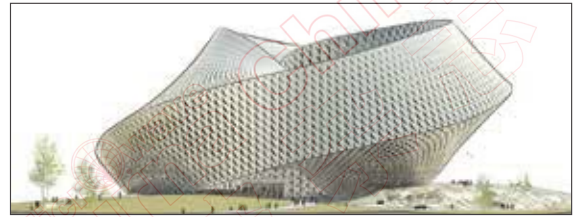


图 2. Kazakhstan 提出的莫比乌斯形状的国家图书馆⁵。



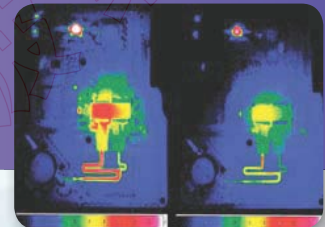
图 3. 莫比乌斯汽车⁶。

可以描述为一个合成的仿射变换（缩放变换： $z \rightarrow tz$ ，平移： $z \rightarrow z+p$ ，旋转： $z \rightarrow e^{i\theta} z$ ，复共轭： $z \rightarrow \bar{z}$ ，倒数： $z \rightarrow 1/z$ ），其中 $t, p \in \mathbb{C}$ ， $f(z)$ 将 \mathbb{C} 一一映射到自身，并且连续； $f(z)$ 将圆和线映射为圆和线； $f(z)$ 是保角变换。

等式 4 是一个强大的变换，将莫比乌斯表面发展成一个拓扑结构，目前只局限在数学的想象中。现在可以

低损耗 高导热 PCB 材料

TC350, TC600



特性：

- 介电常数=3.50,6.15
- 损耗=0.0020
- 热膨胀系数=23,35 ppm/
- 介电常数温漂=-10, -75 ppm/

优势：

- 降低器件的峰值温度
- 提升功放效率和线性度
- 承受更高的功率容量

ARLON

TECHNOLOGY ENABLING INNOVATION

欢迎光临 2015 北京 EDI
334号展位

(866) 394-6508 www.arlon-med.com

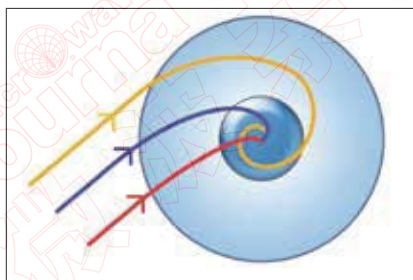


图 4. 由梯度折射率超材料壳和有损耗的介质核心组成的黑洞模型¹⁰。

利用不同设计的超分子实现，使能够选择优化变换、映射、生成网格、图像处理、密码学以及其他在物理世界和日常生活中非常有用的工程分支。

理论和应用

莫比乌斯带——建筑

图 2 描述了一个利用莫比乌斯带原理的获奖建筑作品⁵。墙无缝地变成了屋顶，屋顶无缝地变成了墙。结构的外表面超越了建筑学原理上的墙和天花板。这个结构提供了一种稳定的可以对抗地震和其他由地震引起的震动以及声学震动，同时还可以在建筑内部提供标准加热和冷却。

莫比乌斯带——汽车

图 3 描述了由 Tommaso Gecchelin 设计的莫比乌斯汽车⁶。连续对称的弯曲转换出一个出神入化的空气动力学汽车设计。这表征了一种通过独特神秘的方法，利用莫比乌斯带概念统一内部和外部的主体。证明了卓越的对抗破坏的稳定性以及燃料的高效率利用。

莫比乌斯带——磁带

如果传送带由莫比乌斯带形状做成，它们会均匀磨损，因为它们在每一个旋转处快速翻动。而普通的传送带只磨损一边。类似地，莫比乌斯带形状的磁带也可以用在连续的记录设备上，可成倍的增加记录和播放的时间。

莫比乌斯带——黑洞

黑洞是一个具有相当大引力的

区域，可以吸收它附近的任何物质。这是由于它巨大的重力势能，在一个弯曲的时空里影响了物质的传播来构成一个圆圈⁷。这和电磁波在弯曲空间或者非均匀莫比乌斯超材料介质中传播的情况类似。因此，通过对比折射率和重力的度量，我们可以利用电磁波和莫比乌斯超材料来模仿天体力学⁸。最近发表的一个研究结果论证了在微波频段内利用超材料实现电磁黑洞。研究结果实现了电磁波的弯曲进而螺旋地被吸收进人工电磁黑洞的现象⁹。Cheng 等人报道了一种由梯度折射率超材料壳和有耗介质芯组成的黑洞（如图 4 所示），它可以有效吸收从各个方向传播来的电磁波，效率可以达到 99%¹⁰。可以通过加入更高维度的莫比乌斯超材料梯度折射率壳来将吸收率提高到 100%。这在热辐射、能量吸收和高 Q 值散射模式谐振方面有很多应用。

莫比乌斯带——石墨烯

石墨烯由于其非凡的结构和优秀的电子特性引起了广泛关注。单层石墨拥有类似平面纸或者具有很大体积弹性模量的塑料性质，即很容易被弯曲¹¹。这些独特的性质使得石墨烯能将碳纳米管束缚住而不使其变形，这使得建立莫比乌斯超材料带在现代微波和光学通信系统中非常有前景。图 5 给出了莫比乌斯带组成表现为拓扑绝缘体的石墨烯纳米管，具有拓扑学感应的热和磁现象¹¹。

Wang 研究了固定长度但是不同宽度莫比乌斯带的总磁矩（TMM）的稳定性¹¹。由石墨烯纳米管组成的莫比乌斯带格外的稳定。这些独特的磁特性使得石墨烯做成的莫比乌斯带给自旋器件添砖加瓦。

莫比乌斯带——无源电子器件

电阻、电感和电容是电子电路系统中的基本元素。在一个理想电路中，电阻只贡献电阻，电容只贡献电容，电感值贡献电感。然而这不符合高频情况，因为高频会出现不希望的电磁耦合和相关的寄生现象。

电阻器：在电子线路中，电阻是用来降低电流和电压的电子器件。然而，作为电阻器件，由于其中流动的电流，它的功能受到寄生电抗的影响。在内部和外部形成的磁场产生了自感 L 和电阻 R 串联。此外，弯曲的金属丝以及各种金属物体之间的电容，等效地表示为寄生电容 C。

在电流和电压频率 ω ，电阻的

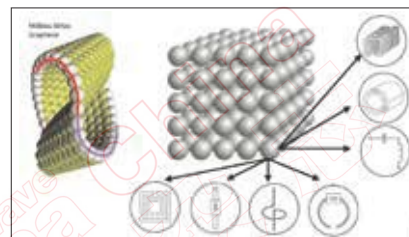


图 5. 典型的由石墨烯构成的莫比乌斯带¹¹。

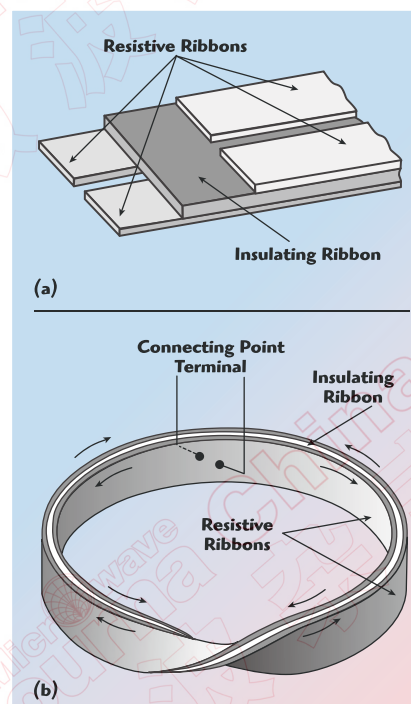


图 6. (a) 莫比乌斯带电阻，(b) 电流流动方向¹²。

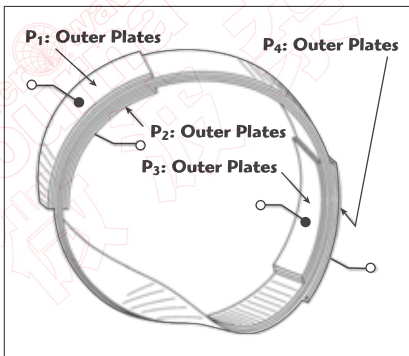


图7. 莫比乌斯带电容器¹³。

L 和 C 产生了相移 ϕ 和时间常数 τ ，可以描述为

$$\phi_{\text{Resistor}} = \omega\tau = \frac{\omega L}{R}(1 - \omega^2 LC) - \omega RC \quad (5)$$

$$\phi_{\text{Resistor}} \rightarrow 0 \left(\text{for } \frac{L}{R} = RC, \omega^2 LC \ll 1 \right) \quad (6)$$

在公式6中， $L/R=RC$ 和 $\omega^2 LC \ll 1$ ，相移 和时间常数 将趋于零。对于这个原因，尽管自感和寄生电容与电阻相关，但在无线电频率可实现合理的时间常数。

然而，在微波和毫米波频段，是不可能得到 $\omega^2 LC \ll 1$ 的；因此，一个简单的电阻表现得像复数阻抗。此问题的解决方案是莫比乌斯带电阻¹²。图6展示的是典型莫比乌斯带电阻，其中内外层连接到一个终端。

导电层是一个长度连续的沿莫比乌斯电阻表面法线方向分割区域的材料，固定到介质层表面连续长度的导电材料部分。介质和导电层的连续性只是在圆周方向运行的莫比乌斯电阻的长度而不是在横向方向的长度。应用在终端的直流电流将实际上在圆周方向上流动而不是在横向方向上，这



图8. (a) 莫比乌斯带滤波器（利用两个垂直连接线实现的莫比乌斯“扭曲”）。(b) 平面结构和在聚四氟乙烯基板上实现的莫比乌斯 BPF 照片。¹⁵

是由于在介电材料层法线方向的导电表面区域之间连续性间断。

广东生益科技股份有限公司

SHENGYI TECHNOLOGY CO., LTD.

S7136

射频电路专用基材
High Frequency Circuit Materials

更稳定的性能
More stable performance

最好的性价比
The best cost performance

更及时的交付
More timely delivery

更专业的服务
More professional service

产品特性

Features

- ✓ 碳氢聚合物/陶瓷覆铜板(非PTFE)
- ✓ Hydrocarbon/ceramic laminates - not PTFE
- ✓ 低介电常数公差和低损耗
- ✓ Low dielectric tolerance and ultra low dielectric loss
- ✓ 不同频率下稳定的介电特性
- ✓ Stable electrical properties vs. frequency
- ✓ 温度变化下稳定的介电常数
- ✓ Low thermal coefficient of dielectric constant
- ✓ 超低吸水率
- ✓ Ultra low water absorption

产品应用

Applications

- ✓ 基站功率放大器和天线
- ✓ Cellular Base Station Power Amplifiers and Antennas
- ✓ RFID标签
- ✓ Rf Identification Tags
- ✓ 天馈射频子系统
- ✓ Antenna Feeder Subsystem
- ✓ LNA, LNB

生益就在您身边!
ShengYi is always with you!

电话: +86 0769 22271828EX2203
邮箱: email@syst.com.cn
Http://www.syst.com.cn



图9.由金属和介质组成亚分子结构的莫比乌斯对称性 (由国家科学提供的基金)¹⁷。

在终端连接点交变电压的应用产生了在介质反向交变电流的场,其中莫比乌斯电阻具有容性电抗型,而不是对应于莫比乌斯带长度相等的波长或等于其长度的整数倍。结果,莫比乌斯电阻具有传递衰减元件有一个波长信号的性质,这不等于莫比乌斯带长度或其长度的整数倍¹³。

考虑到此带由良好导电材料制成,所以沿着带流动的电荷和电流将在边界停止。由安培定律,通过莫比乌斯带的总流量 ϕ_B 是由在边界 ∂M 四周电流的线 I 积分求出。从边界任意已知点出发并计算,当一点沿着莫比乌斯带一个完整的圆边缘移动得出:

$$\oint_{\partial M} I \cdot dl = \oint_{\partial M} \delta \phi = \phi_B = 0 \quad (7)$$

由公式7得出,莫比乌斯带的总通量是零。应用此公式, Davis 设计并获得莫比乌斯电阻的专利¹²,其中通过电阻输入端的电流分裂成两个相等但方向相反脉冲,这是由于输出端的两个阻抗是相等。由图6可看出,当两个脉冲分别沿着扭转

了 180° 电阻的表面行走,他们大小相等方向相反,两者相消。这意味着当他们到达输出端时净量趋于零。为了达到这个结果,两个终端有必要是相反的,否则,两个脉冲相位差不是 180° ,从而不会完全消失(意味着剩磁的存在)。由于没有电磁场,莫比乌斯电阻也不会有反应并且保持其性质即使被弯折或变形。莫比乌斯电阻的特征将不会随着其长度和形状改变。它可以绕圆柱芯或薄片,甚至可以形成一个球,让它环绕,减少占用空间³。

电容器:莫比乌斯电阻有零残留自感;然而,存在一种内在的微不足道的电容效应,对到达目的有重大实用性。通过从截止到导通修改莫比乌斯电阻材料成分,可增强电容的副作用。这是 Brown 用莫比乌斯电阻的电容效应设计的莫比乌斯电容器¹³。通过分层连续的有第二种介质材料莫比乌斯电阻的传导表面设计的此结构,然后分层此介质为莫比乌斯电阻大小兼容的两个传导表面。这样的布局使导电表面正好相反;同时,沿表面所有点每一导电表面的法线平行于莫比乌斯电阻的表面的法线。图7表示一个典型的莫比乌斯电容器,其中外面的板 (P_1, P_2, P_3 和 P_4) 通过带外导体连接¹²。

如果正弦电压 $v_1(t)$ 施加于 P_1 且施加于 P_2 电压是:

$$v_2(t) = V_m \sin \omega \left(t + \frac{1}{u} \right), \omega = 2\pi f \quad (8)$$

其中 $v_1(t) = V_m \sin \omega t$, V_m 是最大幅值, l 是莫比乌斯电阻的长度(如果环是开的,换的圆周等于环的长度), u 是 P_1 和 P_2 的传播速度,和 $t = \frac{l}{u}$ 是在导电表面(被和莫比乌斯电阻长度相同的距离分离)两个相反

点 P_1 和 P_2 之间波传播时间。

公式8中,在任意时间 P_1 和 P_2 的电位差 δv 是:

$$\delta v = v_1(t) - v_2(t) = V_m \sin \omega t - V_m \sin \omega \left(t + \frac{1}{u} \right) \quad (9)$$

如图6所显示的公式8的衍生方程式由时间 t 在莫比乌斯带的导电表面两个相反点 P_1 和 P_2 之间的电流 $i(t)$:

$$i(t) = C \left(\frac{dv}{dt} \right) = \omega C V_m \quad (10)$$

$$\left[\cos \omega t - \cos \omega \left(t + \frac{1}{u} \right) \right] = \omega C V_m$$

$$\left[\cos \omega t - \cos \omega t \times \cos \frac{\omega l}{u} + \sin \omega t \times \sin \frac{\omega l}{u} \right]$$

$$i(t) = \omega C V_m \quad (11)$$

$$\left[\cos \omega t \left(1 - \cos \frac{\omega l}{u} \right) - \sin \omega t \times \sin \frac{\omega l}{u} \right]$$

由公式11,如果 $l = \lambda$ (莫比乌斯带的长度等于传播场的波长),波的频率减小到 $f = \frac{u}{\lambda}$,在莫比乌斯带的传到表面两个相反点 P_1 和 P_2 之间产生的电流趋于0:

$$i(t)_{l=\lambda} \rightarrow \left(f = \frac{u}{\lambda} \right) = \omega C V_m \quad (12)$$

$$\left[\cos \omega t (1 - \cos 2\pi) - \sin \omega t \times \sin 2\pi \right] = 0$$

公式(12)中,当波长等于环的长度或其整数倍,在 P_1 和 P_2 并联电路的莫比乌斯带将有谐振频率和其谐振用通过电路非衰减来衰减其它频率。

谐振器:莫比乌斯带电阻的感念是基于作用到带的信号当循环时将不会遇到任何障碍,次循环就像无限传输线,得到高品质因数(Q)谐振。这个特性在许多无线电和微波得到应用,如与谐振频率是一半大小的同构

造线性线圈小型化谐振器，无线的全球传播的特斯拉线圈的和高温超导体。

Jeffrey Pond 提出了莫比乌斯带滤波器（见图 8）^{14,15}，其中莫比乌斯的扭曲得到了额外的相移促使谐振频率和频率选择能基于小型化尺寸。“扭曲”是使用两个通过衬底上连接实现的。

莫比乌斯带——超材料对称性

对称性被定义为系统的特征或性质，当系统发生改变时有守恒性。一般情况下，空间对称性是很容易观察到的，但其它的，如在超材料的光学对称性，是具有隐藏性的。最近出版的文献描述了引入超材料（亚分子）的电磁莫比乌斯对称性，它是由金属和介质基底组成^{16,17}。在超材料中发现的电磁对称性是相当于莫比乌斯带的结构对称性，通过在亚原子之间耦合电磁的符号变化控制扭曲的数量。负折射人工材料（超材料）具有不同的耦合的符号表现出谐振频率，取决于匝数而不是“扭曲”的位置，从而证实了莫比乌斯对称性。

图 9 描述了多维空间利用莫比乌斯对称性转化普通的苯分子到亚分子的莫比乌斯原理（产生了具有两面但是只有一边的半扭带拓扑现象）¹⁶。图 9 描述了像有配置为耦合开口环谐振器的金属谐振亚原子的结构的三体系统，象征通过三个 120° 旋转角度的拓扑莫比乌斯环对称（C3 对称）的亚分子。构成的亚原子之间的电磁耦合常数变化导致莫比乌斯扭曲¹⁷。

小结

自诞生以后，莫比乌斯带引起了世界各地的数学家和工程师的非凡想象，并且它以其非定向性和单面性吸引着大家。莫比乌斯带的独特特

征将激发永无止境的新发明；可以说，未来莫比乌斯带的表面研究将会持续不断。（张茜、尹佳媛、蒋卫祥、崔铁军译）■

参考文献：

1. Hückel, Grundzüge der Theorie ungesättigter und aromatischer Verbindungen, Verlag Chem, Berlin, 1938, pp. 77-85.
2. E.L. Starostin and G.H.M. van der Heijden, "The Shape of a Möbius Strip," Nature Materials, Vol. 6, July 2007, pp. 563-567.
3. C.A. Pickover, The Möbius Strip: Dr. August Möbius's Marvelous Band in Mathematics, Games, Literature, Art, Technology, and Cosmology, Thunder's Mouth Press, New York, N.Y., 2006.
4. "Möbius Strip Ties Liquid Crystal in Knots," R&D Magazine, August 20, 2013, www.rdmag.com/news/2013/08/m%C3%B6bius-strip-ties-liquidcrystal-knots, accessed September 2014.
5. D. Basulto, "National Library in Astana, Kazakhstan/ BIG," ArchDaily, August 25, 2009, www.archdaily.com/33238/national-library-in-astanakazakhstan-big/, accessed September 2014.
6. T. Gecchelin, "Möbius Concept Car Design," Automotive Design, Engineering, Industrial Design, 2010, http://tommasogecchelin.prosite.com/208236/812241/gallery/Möbius-concept-cardesign, accessed September 2014.
7. A.J. Kox, M.J. Klein and R. Schulmann Kox, The Collected Papers of Albert Einstein, Vol. 6, Princeton University Press, 1997.
8. D.A. Genov, S. Zhang and X. Zhang, "Mimicking Celestial Mechanics in Metamaterials," Nature Physics, Vol. 5, July 2009, pp. 687-692.
9. E.E. Narimanov and A.V. Kildishev, "Optical Black Hole: Broadband Omni-Directional Light Absorber," Applied Physics Letters, Vol. 95, July 2009.

10. Q. Cheng, T.J. Cui, W.X. Jiang and B.G. Cai, "An Electromagnetic Black Hole Made of Metamaterials, Cornell University Library, April 30, 2010, http://arxiv.org/abs/0910.2159, accessed September 2014.
11. X. Wang, X.H. Zheng, M. Ni, L. Zou and Z. Zeng, "Theoretical Investigation of Mobous Strips Formed From Graphene," Applied Physics Letters, Vol. 97, No. 12, September 2010, pp. 123103 - 123103-3.
12. R.L. Davis, "Non-Inductive Electrical Resistor," US Patent 3267406A, August 16, 1966. 13. T.J. Brown, "Möbius Capacitor," US Patent 4599586, July 8, 1986.
14. J.M. Pond, "Möbius Resonator and Filter," US Patent 6445264, September 3, 2002.
15. J.M. Pond, "Möbius Dual Mode Resonators and Bandpass Filters," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 48, No. 12, December 2000, pp. 2465-2471.
16. C.W. Chang, M. Liu, S. Nam, S. Zhang, Y. Liu, G. Bartal and X. Zhang, "Optical Möbius Symmetry in Metamaterials," Physical Review Letters, Vol. 105, December 2010, pp. 235501-1-235501-4.
17. Lynn Yarris, "Strange New Twist: Berkeley Researchers Discover Möbius Symmetry in Metamaterials," Berkeley Lab, 20 December 2010, http://newscenter.lbl.gov/2010/12/20/Möbius-symmetryin-metamaterials/#sthash.Ezqlm5Pr.dpuf, accessed September 2014.
18. A.K. Poddar, "Slow-Wave Resonator Based Tunable Multi-Band Multi-Mode Injection-Locked Oscillators," Research Report, RF and Microwave Techniques Brandenburg University of Technology Cottbus-Senftenberg 2014, https://www-docs.tuottbus.de/mikrowellentechnik/public/poddar_report_long_ebook.pdf.